<u>Begründung:</u> Sei $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$.

Wegen
$$\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n - z_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(z_0)$$

gilt für $n \gg 1$ beispielsweise: (wieso?)
$$\frac{|f(z_n)-f(z_0)|}{|z_n - z_0|} \leq 1 + |f'(z_0)| \Longrightarrow$$

$$|f(z_n) - f(z_0)| \leq (1+|f'(z_0)|)\,|z_n - z_0| \to 0,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$. □

<u>Beispiele:</u>

1.) <u>Konstante Funktionen:</u> mit $a, b \in \mathbb{R}$

sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$$\boxed{f(z) := a + ib}$$

Offenbar: $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = 0$

$\Longrightarrow$ f auf $\mathbb{C}$ holomorph mit $\boxed{f' \equiv 0}$

2.) Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\boxed{f(z) := z^2}$

Für $z \neq z_0$ ist

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z^2-z_0^2}{z-z_0} =$$

$$\frac{(z+z_0)(z-z_0)}{z-z_0} = z+z_0 \longrightarrow 2z_0$$

bei $z \to z_0$. Also: f auf $\mathbb{C}$ holomorph mit $\boxed{f'(z) = 2z}$

analog: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\boxed{f(z) := z^n,\ n \in \mathbb{N}}$

$\Longrightarrow$ f auf $\mathbb{C}$ holomorph mit $\boxed{f'(z) = n z^{n-1}}$

Die Bsple 1.) + 2.) verhalten sich also wie im Reellen. Aber nicht jede einfach aufgebaute Funktion ist holomorph!

3.) $\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\quad f(z) := \overline{z} = x - iy \\ \text{ist } \boxed{\text{nirgends}} \text{ komplex diff'bar} \end{array}}$

Fasst man f als reelle Funktion auf, also

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x,-y), \text{ so}$$

existieren natürlich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}\ (\equiv (1,0))$, $\frac{\partial f}{\partial y}\ (= (0,-1))$.

D.h.: Aus der Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ kann man nicht auf komplexe Differenzierbarkeit schließen!!

Sei nun $z_0 := x_0 + i y_0$. Wir betrachten Punkte $\boxed{z = x + i y_0}$

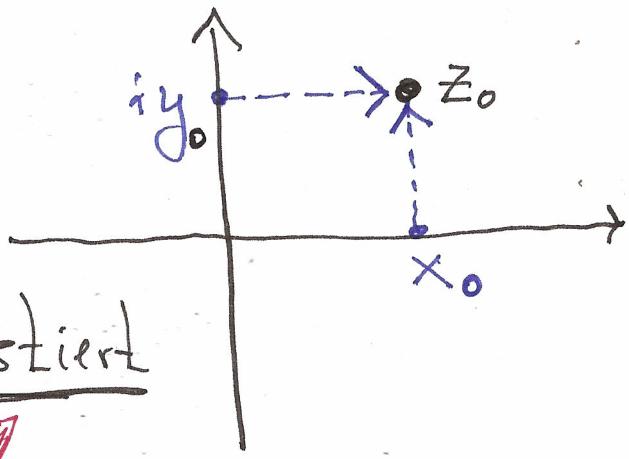
$$\Longrightarrow \quad \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} =$$

$$\frac{x - i y_0 - \overline{(x_0 + i y_0)}}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

und für Punkte $\boxed{z = x_0 + i y}$ gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x_0 - i y - x_0 + i y_0}{i(y - y_0)} = -1$$

Führt man also den „Grenzübergang $z \to z_0$" in Richtung der Achsen aus, so ergeben sich verschiedene Werte $\Longrightarrow$ Limes existiert nicht!



Eine Vielzahl holomorpher Funktionen ($\to$ Polynome, rationale Funktionen) liefern die üblichen Rechenregeln

Satz 22.1.1: Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen.

i) $f, g : U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ komplex diff'bar $\Longrightarrow$ $f+g$, fg in z_0 komplex diff'bar mit

$$\boxed{\begin{aligned}(f+g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0),\\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\end{aligned}}$$

ii) $f: U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$

komplex diff'bar und $\boxed{f(z_0) \neq 0}$

$\Longrightarrow \frac{1}{f}$ in einer Umgebung von z_0

definiert und in z_0 komplex diff'bar

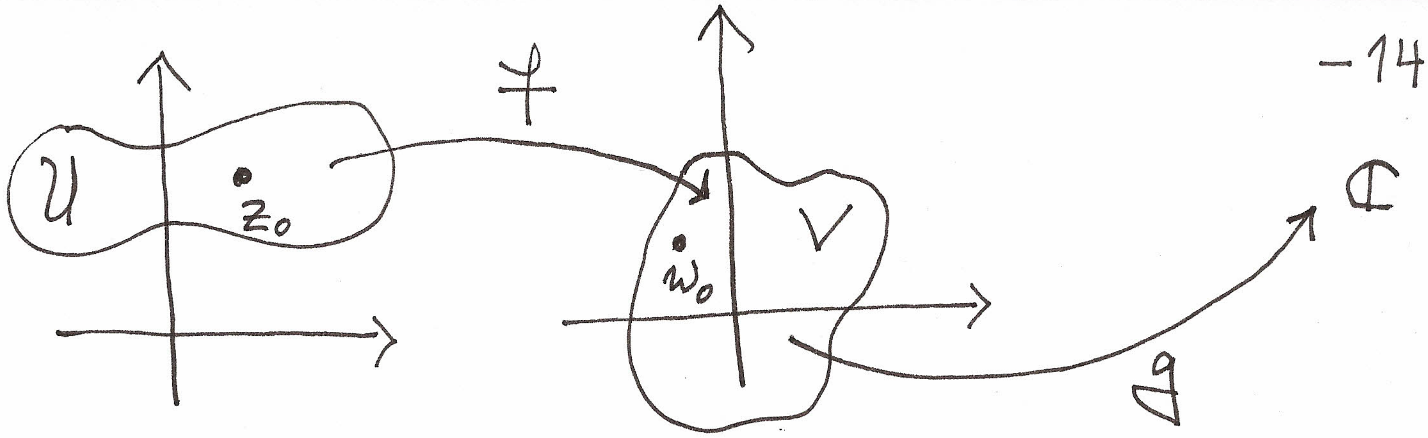
mit $\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}}$

$\Longrightarrow$ ("Quotientenregel")

$\Updownarrow$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) \overset{i), ii)}{=} \ldots\ldots\ldots$

iii) (Kettenregel) Sei $f: U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ komplex diff'bar. Es gelte $f(U) \subset V$ und $g: V \to \mathbb{C}$ sei in $w_0 := f(z_0)$ komplex diff'bar.



Dann ist $g \circ f$ in z_0 komplex diff'bar mit

$$\boxed{(g \circ f)'(z_0) = \underbrace{g'(w_0) \cdot f'(z_0)}_{\text{Produkt in } \mathbb{C}}}$$

Bsple: i) $\dfrac{d}{dz} \dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{z^2}$, $z \neq 0$

ii) $$\boxed{\frac{d}{dz} z^k = k z^{k-1} \qquad k \in \mathbb{Z};\ z \neq 0 \text{ für } k < 0}$$

iii) Nachweis Kettenregel

Wie hängt das Konzept der $\mathbb{C}$-Ableitung mit den reellen partiellen Ableitungen zusammen? →

□